

## Waagrechter, senkrechter & schräger Wurf

Alles nur eine Frage des Bezugssystems?

**Aufgabe:** Eine Person wirft drei Bälle in die Luft (jeweils mit  $|\vec{v}_0| = \text{konst.} \neq 0 \frac{m}{s}$ ). Den Ersten wirft sie senkrecht nach oben, den Zweiten waagrecht nach vorne und den Dritten schräg nach oben (im  $45^\circ$  Winkel gegenüber der Bodenhorizontalen).

Beschreiben Sie die drei Situationen des waagrechten, senkrechten, und schrägen Wurfs aus der Sicht eines entfernten Zuschauers. Einmal mit  $\vec{e}_x$  parallel zur Bodenhorizontalen und einmal aus einem Bezugssystem mit  $\vec{e}_x$  parallel zu  $\vec{v}_0$ . Skizzieren Sie hierzu die Flugbahnen qualitativ und beschreiben Sie diese mittels Vektoren mathematisch.

## Lösung:

### Konkrete Umsetzung

### Zugrundeliegendes Prinzip

### Nützliches / Zusatzinformationen

#### Vorbemerkung:

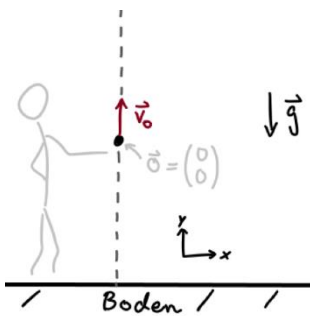
Zunächst muss man die Realsituation auf eine physikalische Darstellung, also auf das aus physikalischer Sicht Wesentliche, reduzieren.

- Da keine genaueren Angaben zur Luftreibung gemacht werden, kann die Reibung als vernachlässigbar angenommen werden.
- Da keine genaueren Angaben zur Form des Balles gemacht werden, kann dieser als Punktmasse genähert werden.
- Da die Bewegung ab dem Zeitpunkt des Loslassens beschrieben werden soll, spielt die Person keine weitere Rolle mehr. Sie kann in der Betrachtung ignoriert werden.
- Die Orientierung der Vektoren wird durch ein Koordinatensystem verdeutlicht.

Zusätzlich können zur besseren Veranschaulichung und mathematischen Beschreibung noch weitere Größen wie die Richtung der Gewichtskraft oder der Boden eingezeichnet werden. Für die Beantwortung der Aufgabenstellung wären solche Größen aber nicht notwendig.

Fall 1) Beschreibung der drei Flugbahnen mit  $\vec{e}_x$  parallel zur Bodenhorizontalen:

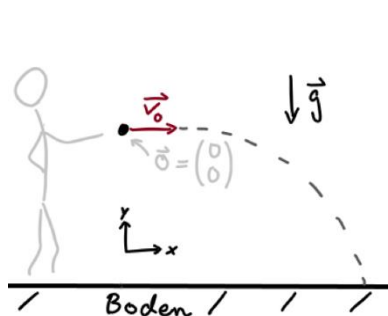
#### Senkrechter Wurf



Definieren:  $v_0 := |\vec{v}_0|$ ,  $g := |\vec{g}|$ .

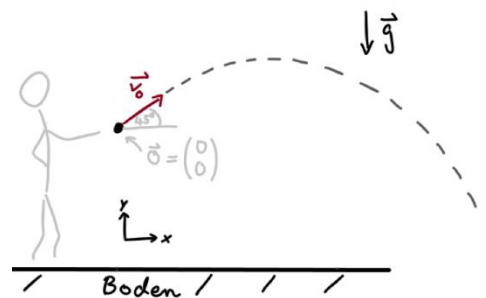
$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t - \frac{1}{2} \vec{g} \cdot t^2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{pmatrix} \\ &= \left( v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \right) \cdot \vec{e}_y\end{aligned}$$

#### Waagrechter Wurf



$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t - \frac{1}{2} \vec{g} \cdot t^2 \\ &= \begin{pmatrix} v_0 \cdot t \\ -\frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{pmatrix} \\ &= (v_0 \cdot t) \cdot \vec{e}_x + \left( -\frac{1}{2} g \cdot t^2 \right) \cdot \vec{e}_y\end{aligned}$$

#### Schräger Wurf

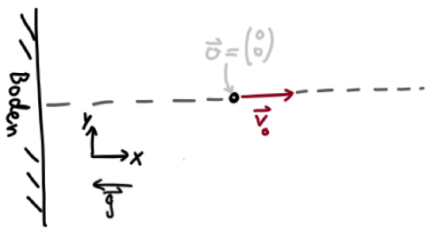


$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t - \frac{1}{2} \vec{g} \cdot t^2 \\ &= \begin{pmatrix} \sin(45^\circ) \cdot v_0 \cdot t \\ \cos(45^\circ) \cdot v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{pmatrix} \\ &= (\cos(45^\circ) \cdot v_0 \cdot t) \cdot \vec{e}_x \\ &\quad + \left( \sin(45^\circ) \cdot v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \right) \cdot \vec{e}_y\end{aligned}$$

Hierbei wurden stets die Vektoren der Ausgangsgeschwindigkeit  $\vec{v}_0$  und Erdbeschleunigung  $\vec{g}$  in **orthogonale Komponenten** entlang  $\vec{e}_x$  und  $\vec{e}_y$  zerlegt. Der Ursprung  $\vec{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  wurde stets an dem Ort des Balles zum Zeitpunkt  $t = 0s$  gelegt, an dem der Ball die Hand der Person verlassen hat. Somit ist  $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Fall 2)** Beschreibung der drei Flugbahnen mit  $\vec{e}_x \parallel \vec{v}_0$ :

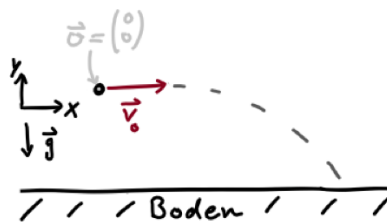
### Senkrechter Wurf



$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{v}_0 \cdot t - \frac{1}{2} \vec{g} \cdot t^2 \\ &= \begin{pmatrix} v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \left( v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \right) \cdot \vec{e}_x\end{aligned}$$

Im Vgl. zu Fall 1) wurde aus  $\vec{e}_x \rightarrow \vec{e}_y$  und umgekehrt. Es entspricht also einer Drehung um  $90^\circ$ .

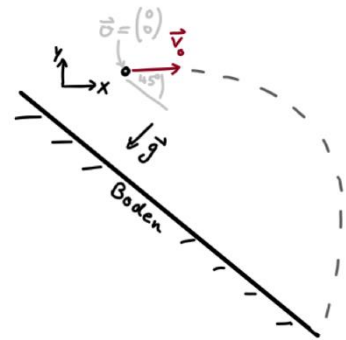
### Waagrechter Wurf



$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{v}_0 \cdot t - \frac{1}{2} \vec{g} \cdot t^2 \\ &= \begin{pmatrix} v_0 \cdot t \\ -\frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{pmatrix} \\ &= (v_0 \cdot t) \cdot \vec{e}_x + \left( -\frac{1}{2} g \cdot t^2 \right) \cdot \vec{e}_y\end{aligned}$$

Im Vgl. zu Fall 1) hat sich nichts verändert, da bereits vorhin  $\vec{e}_x \parallel \vec{v}_0$  galt.

### Schräger Wurf



$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{v}_0 \cdot t - \frac{1}{2} \vec{g} \cdot t^2 \\ &= \begin{pmatrix} v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \cos(45^\circ) g \cdot t^2 \\ -\frac{1}{2} \cdot \sin(45^\circ) \cdot g \cdot t^2 \end{pmatrix} \\ &= \left( v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \cos(45^\circ) g \cdot t^2 \right) \cdot \vec{e}_x \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot \sin(45^\circ) g \cdot t^2 \cdot \vec{e}_y\end{aligned}$$

Im Vgl. zu Fall 1) hat sich das Koordinatensystem um  $45^\circ$  gedreht. Nun muss zur mathematischen Beschreibung anstelle von  $\vec{v}_0$  die Erdbeschleunigung  $\vec{g}$  in ihre **Komponenten entlang  $\vec{e}_x$  und  $\vec{e}_y$**  zerlegt werden.

Die Wahl eines Bezugssystems ist in vielen Aufgaben nicht vorgegeben. In der klassischen Mechanik ist es meist von Vorteil ein (unbeschleunigtes) **Inertialsystem** zu wählen.

Welches Inertialsystem die „beste Wahl“ darstellt, ist von der jeweiligen Aufgabe abhängig. Betrachtet man hier eine zweidimensionale Bewegung so ist es für die mathematische Beschreibung meist am einfachsten das System so zu wählen, dass mindestens eine der gegebenen Größen (in unserem Beispiel also  $\vec{v}_0$  oder  $\vec{g}$ ) parallel zu einer der Koordinatenachsen stehen.